Cinemática de la partícula

Coordenadas cartesianas. Coordenadas intrínsecas

Modelo de partícula

- Definiciones básicas
  - Posición: $\bar{r}(t)$
  - Velocidad: $\bar{v}(t) = \frac{d\bar{r}}{dt} \quad \rightarrow \quad \bar{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \bar{v}(t) \cdot dt = \bar{r}(t)$
  - Aceleración: $\bar{a}(\mathrm{t}) = \frac{d\bar{v}}{dt} \quad \rightarrow \quad \bar{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \bar{a}(t) \cdot dt = \bar{v}(t)$

Cinemática: coordenadas cartesianas

Importante: notación vectorial

- Posición: $\bar{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$

- Velocidad: $\bar{v}(t) = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$

$$\rightarrow \quad \int_{t_0}^{t} \bar{v}(t) \cdot dt = \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}(t)} d\bar{r} \quad \rightarrow \quad \bar{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \bar{v}(t) \cdot dt = \bar{r}(t)$$

- Aceleración: $\bar{a}(\mathrm{t}) = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}$

$$\rightarrow \quad \int_{t_0}^{t} \bar{a}(t) \cdot dt = \int_{\bar{v}_0}^{\bar{v}(t)} d\bar{v} \quad \rightarrow \quad \bar{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \bar{a}(t) \cdot dt = \bar{v}(t)$$

Ejemplo 1

Un objeto que inicialmente está en la posición $\bar{r}_0 = 2m\breve{\imath}$, se mueve en el plano con una velocidad

$$\bar{v} = 0{,}2\frac{m}{s^3}t^2\breve{\imath} + \left(0{,}4\frac{m}{s^4}t^3 + 2\frac{m}{s}\right)\breve{\jmath}$$

- Determinar la aceleración y la posición del objeto en función del tiempo
  - $\bar{a}(t) = \frac{d\bar{v}}{dt} = 0{,}4\frac{m}{s^3}t\breve{\imath} + 1{,}2\frac{m}{s^4}t^2\breve{\jmath}$
  - $\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + \int_{t_0}^{t}\bar{v}(t)\cdot dt = 2m\breve{\imath} + \int_{0s}^{t}\left(0{,}2\frac{m}{s^3}t^2\breve{\imath} + \left(0{,}4\frac{m}{s^4}t^3 + 2\frac{m}{s}\right)\breve{\jmath}\right)\cdot dt$
  - $\bar{r}(t) = \left(2m + \frac{1}{15}\frac{m}{s^3}t^3\right)\breve{\imath} + \left(0{,}1\frac{m}{s^4}t^4 + 2\frac{m}{s}t\right)\breve{\jmath}$

Importante: ser prolijo con la notación vectorial

Ejemplo 2a

Enunciado

La trayectoria de un objeto es $y(x) = 2m \cdot sen(4\frac{1}{m}x + \pi)$ [1]. Si la componente de la velocidad en el eje x es $V_x = 2\pi t\frac{m}{s^2}$ y la posición inicial del objeto es $\overline{r_0} = \frac{3}{4}\pi m\hat{\imath}$ [2]:

Escribir la velocidad y aceleración en función del tiempo.

La resolución de este ejemplo está más detallado en el aula virtual (ejercicio extra 1)

Ejercicio 2a

- A partir de la componente Vx, se puede calcular x(t)

$$\int_{x_0=\frac{3}{4}\pi m}^{x(t)} dx = \int_0^t 2\pi t \frac{m}{s^2} dt$$

$$x(t) - \frac{3}{4}\pi m = \pi t^2 \frac{m}{s^2}$$

$$x(t) = \pi t^2 \frac{m}{s^2} + \frac{3}{4}\pi m$$

Ejercicio 2a

- Se reemplaza x(t) en la ecuación de la trayectoria

$$y(x) = 2m \cdot sen(4\frac{1}{m}x + \pi)$$

$$y(t) = 2m \cdot sen(4\frac{1}{m}(\pi t^2\frac{m}{s^2} + \frac{3}{4}\pi m) + \pi)$$

$$y(t) = 2m \cdot sen(4\pi t^2\frac{1}{s^2} + 4\pi)$$

Ejercicio 2a

- Derivando la coordenada y(t) en función del tiempo, se calcula Vy

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d[2m \cdot sen(4\pi t^2 \frac{1}{s^2} + 4\pi)]}{dt}$$

$$V_y = 2m \cdot cos(4\pi t^2 \frac{1}{s^2} + 4\pi) \cdot 8\pi t \frac{1}{s^2}$$

$$V_y = 16\pi t \frac{m}{s^2} \cdot cos(4\pi t^2 \frac{1}{s^2} + 4\pi)$$

Ejercicio 2a

- Así se obtiene la velocidad (vector) en función del tiempo

$$\bar{V}(t) = \left[2\pi t \frac{m}{s^2}\right]\hat{\imath} + \left[16\pi t \frac{m}{s^2} \cdot cos\left(4\pi t^2 \frac{1}{s^2} + 4\pi\right)\right]\hat{\jmath}$$

- Y derivando esta expresión se obtiene la aceleración en función del tiempo

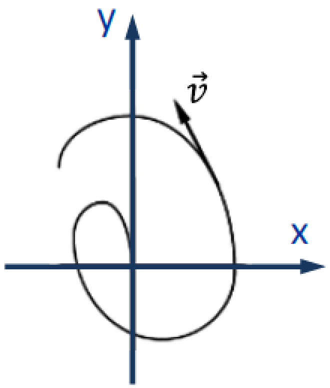
$$\bar{a}(t) = \left[2\pi \frac{m}{s^2}\right]\hat{\imath} + \left[16\pi \frac{m}{s^2} \cdot cos\left(4\pi t^2 \frac{1}{s^2} + 4\pi\right) - 128\pi^2 t^2 \frac{m}{s^4} \cdot sen\left(4\pi t^2 \frac{1}{s^2} + 4\pi\right)\right]\hat{\jmath}$$

Cinemática: coordenadas intrínsecas

- Versores:
  - Tangente: se define con al misma dirección y sentido que la velocidad $\breve{t} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$
  - Normal: está en el plano del movimiento, es perpendicular al tangente y positivo hacia el centro de curvatura del movimiento
  - Binormal (se define según terna derecha, lo veremos más adelante)

- Variables cinemáticas:
  - $\bar{v} = |\bar{v}|\breve{t}$
  - $\bar{a} = \frac{d|\bar{v}|}{dt}\breve{t} + \frac{|\bar{v}|^2}{\rho}\breve{n} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{a}}{|\bar{v}|}\breve{t} + \frac{|\bar{v}\times\bar{a}|}{|\bar{v}|}\breve{n}$

7. Un objeto sigue la trayectoria en espiral que muestra la figura. Mientras la desarrolla, su rapidez es constante, pero el módulo de su aceleración varía.



a) ¿Es constante la velocidad del objeto?

b) ¿Es constante su aceleración?

c) El módulo de la aceleración, ¿aumenta o disminuye?

Piensen 2 minutos y respondan en: https://www.menti.com/9wfvd2jf5x

ALGEBRA VECTORIAL

Repaso

Sean: $\bar{u} = 2\breve{\imath} - 1\breve{\jmath} + 5\breve{k}$ y $\bar{v} = -1\breve{\imath} + 1\breve{\jmath} + 1\breve{k}$

Producto escalar:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 2$$

$$\bar{v} \cdot \bar{u} = 2$$

$$|\bar{u} \cdot \bar{v}| = 2$$

Sean: $\bar{u} = 2\breve{\imath} - 1\breve{\jmath} + 5\breve{k}$ y $\bar{v} = -1\breve{\imath} + 1\breve{\jmath} + 1\breve{k}$

Producto vectorial:

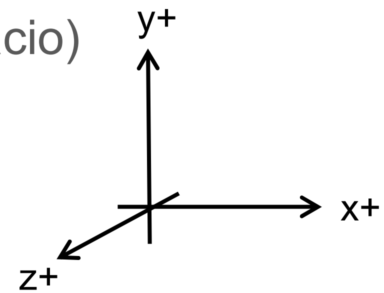
$$\bar{u} \times \bar{v} = -6\breve{\imath} - 7\breve{\jmath} - 1\breve{k}$$

$$\bar{v} \times \bar{u} = 6\breve{\imath} + 7\breve{\jmath} + 1\breve{k}$$

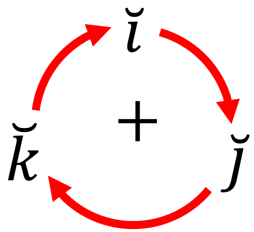
$$|\bar{u} \times \bar{v}| = \sqrt{86}$$

Producto vectorial: Terna derecha en cartesianas

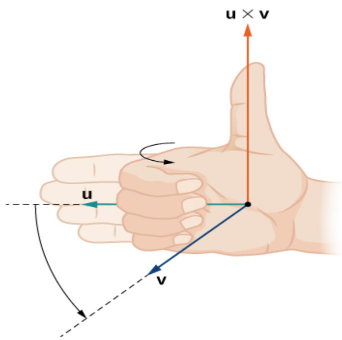
- Terna derecha (puede modificarse la orientación en el espacio)

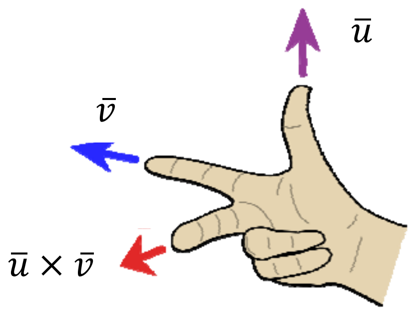


- Reglas:
  - Relación $\breve{\imath} \times \breve{\jmath} = \breve{k}$; $\breve{\jmath} \times \breve{k} = \breve{\imath}$; $\breve{k} \times \breve{\imath} = \breve{\jmath}$



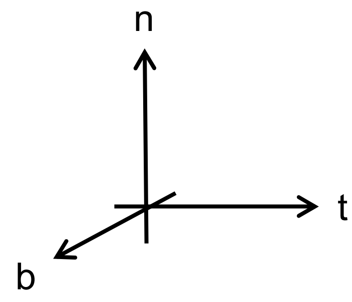
  - Regla de la mano derecha



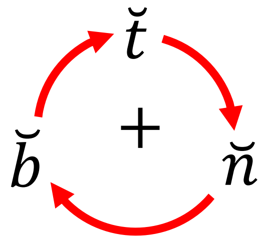


Producto vectorial: Terna derecha en intrínsecas

- Terna derecha en coordenadas intrínsecas (el versor tangente es positivo en la dirección de la velocidad; el versor normal es positivo hacia el centro de la curvatura)



- Reglas:
  - Relación Es equivalente sólo que $\breve{t} \times \breve{n} = \breve{b}$



  - Regla de la mano derecha